

# Harmonische Reihe

## – Lösungshinweis –

Man kann beispielsweise (Holz-)Bretter oder Bücher so stapeln, dass diese einen gewissen Überhang erzeugen. In nebenstehender Abbildung ist dies mit Holzklötzen so dargestellt, dass der Turm gerade noch stabil ist. Der Überhang ist die Größe der horizontalen Verschiebung des obersten zum untersten Objekt. In der Abbildung beträgt der Überhang in etwa die Länge eines Holzklötzes.

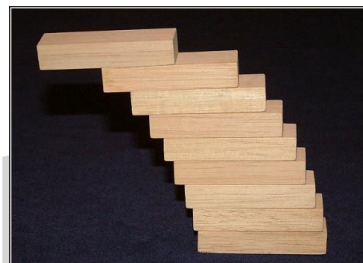


Abbildung 1: Gestapelte Holzklötze  
(Bildquelle: Anton via [Wikimedia Commons](#) [CC BY 2.5])

**?** Wie groß kann der Überhang maximal werden?

**Aufgabe 1:** Nehmen Sie sich zwei Holzbretter und stapeln Sie diese so, dass der Überhang maximal wird.

- Erstellen Sie dann eine Skizze der Seitenansicht der Holzbretter. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Länge eines einzelnen Holzbretts 1 beträgt. Wie groß ist der Überhang? In welchem Zusammenhang steht dieser zum Schwerpunkt des oberen Klotzes?
- Da der maximale Überhang in Zusammenhang mit dem Schwerpunkt eines Objekts steht, wollen wir diesen für den kommenden Schritt bestimmen: Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den beide Holzbretter zusammen bilden. Nehmen Sie vereinfacht an, dass ein einzelnes Holzbrett die Masse sowie Länge 1 besitzt.

**Hinweis:** Die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts  $S$  (bezeichnet als  $x_S$ ), den zwei Körper bilden, berechnet sich als  $x_S = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ , wobei  $x_1, x_2$  die  $x$ -Koordinaten der Schwerpunkte der beiden Körper und  $m_1, m_2$  die Massen der beiden Körper sind.

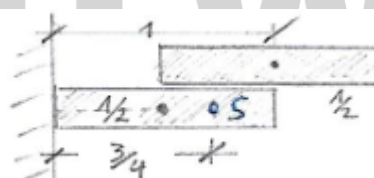
### Zusatzinformationen:

Eine GeoGebra-Simulation zum Stapeln von Hölzern/Büchern von Andreas Lindner findet man unter <https://www.geogebra.org/m/gqwutpy8>. Die Skizzen in den Lösungshinweisen dieses Arbeitsblatts sind von dort entnommen.

Aufgabe 1a)

Skizze inkl.  $x$ -Koordinaten der Schwerpunkte (nicht gefordert):

Der Überhang beträgt  $\frac{1}{2}$ . Dies entspricht genau der Länge vom Schwerpunkt des oberen Holzbretts bis zu dessen (rechter) Kante.



Aufgabe 1b)

Das untere Brett sei Körper 1 und das obere Brett sei Körper 2. Dann ist

$$x_S = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

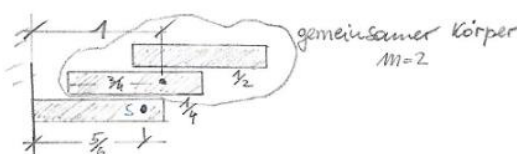
Der Schwerpunkt mit  $x$ -Koordinate  $\frac{3}{4}$  ist auch in Aufgabe 1a) in blau eingezeichnet.

**Aufgabe 2:** Fügen Sie Ihrem Turm ein drittes Holzbrett hinzu und maximieren Sie wieder den Überhang.

- Erstellen Sie wieder eine Skizze in der Seitenansicht. Markieren Sie in der Skizze auch den ermittelten Schwerpunkt aus Aufgabe 1b). Welcher Zusammenhang besteht zur Anordnung mit lediglich zwei Holzbrettern?
- Wie groß ist der gesamte Überhang?
- Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den die drei Holzbretter zusammen bilden.

Aufgabe 2a)

Skizze inkl.  $x$ -Koordinate und Wert des „neuen“ Schwerpunkts (nicht gefordert): Die Anordnung der zwei Holzbretter inkl. deren Überhangs (Aufgabe 1a) ist bei der Anordnung von drei Holzbrettern direkt wieder zu finden. Sie liegen mit ihrem Schwerpunkt auf der Kante des dritten, unteren Holzbretts auf.



Aufgabe 2b)

Der gesamte Überhang setzt sich aus dem Überhang zwischen dem 1. und 2. Holz von oben (beide oberen Holzbretter) sowie dem Überhang zwischen dem 2. und 3. Holz zusammen. Der erste Summand ist dabei  $\frac{1}{2}$ , vgl. Aufgabe 1a). Der zweite Summand lässt sich mit Hilfe der  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts des oberen Körpers bestimmen, welche auf der Länge  $\frac{3}{4}$  des 2. Holzes liegt. Demnach sind noch  $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$  als Überhang übrig. Insgesamt ergibt sich ein Überhang von  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

Aufgabe 2c)

Wir gehen wie in Aufgabe 1b) vor. Da wir in Aufgabe 1 schon den Zusammenhang der beiden oberen Bretter betrachtet haben, sind nun hier die beiden unteren Bretter entscheidend. Da auf dem mittleren Brett auch das obere Brett liegt und sein Gewicht beisteuert, sei das untere Brett Körper 1 und die **beiden oberen Bretter zusammen** seien Körper 2.

$$x_S = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

Die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts bei  $\frac{5}{6}$  ist auch in Aufgabe 2a) in blau eingezeichnet.

**Aufgabe 3:** Um die Frage nach dem maximal möglichen Überhang zu beantworten, wollen wir nun eine beliebige Anzahl an Holzbrettern betrachten.

- Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den  $n$  viele Holzbretter zusammen bilden.
- Berechnen Sie die Größe des gesamten Überhangs, wenn  $n$  viele Holzbretter zusammen überhängen (d.h. ein  $(n + 1)$ -tes Brett als unterstes liegt).
- Welchen Wert kann der Überhang aus Aufgabe 3b) maximal annehmen? Nutzen Sie Ihr Wissen über die harmonische Reihe.

Aufgabe 3a)

Wir gehen wie in Aufgabe 2c) vor. Das untere Brett sei Körper 1 und die **oberen Bretter zusammen (n–1 viele)** seien Körper 2.

$$x_S = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)}{1 + (n-1)} = \frac{\frac{2n-1}{2}}{n} = \frac{2n-1}{2n}$$

Aufgabe 3b)

Der gesamte Überhang setzt sich additiv aus  $n$  vielen einzelnen Überhängen zusammen. Dabei ist der Überhang vom  $(n+1)$ -ten zum  $n$ -ten Holz mit dem Schwerpunkt der  $n$  vielen oberen Bretter bestimmbar. Dieser liegt nämlich auf der Kante des  $(n+1)$ -ten Bretts auf, weshalb der Überhang  $1 - \left(\frac{2n-1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$  ist.

Summiert man all diese einzelnen Überhänge auf, erhält man den Gesamtüberhang von

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Aufgabe 3c)

Der berechnete Überhang aus Aufgabe 3b) kann beliebig groß werden („geht gegen  $\infty$ “).

Denn für  $n \rightarrow \infty$  geht  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  aufgrund der Grenzwertrechenregeln in die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  über, welche divergiert (d.h. in diesem Fall jeden beliebigen, festgesetzten Wert überschreitet).